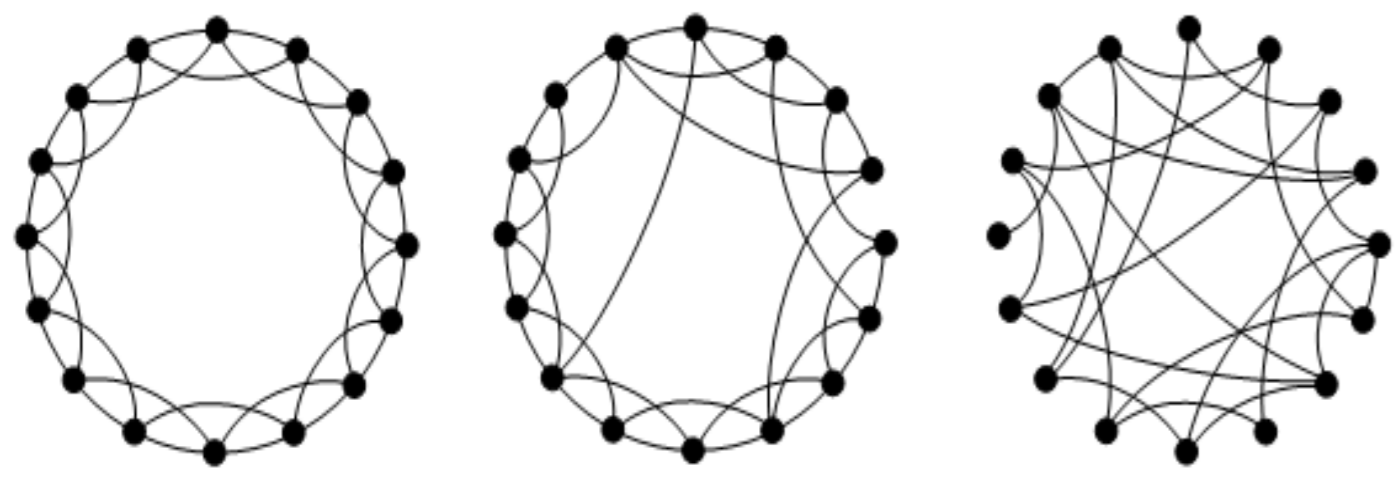


# 1. Uvod

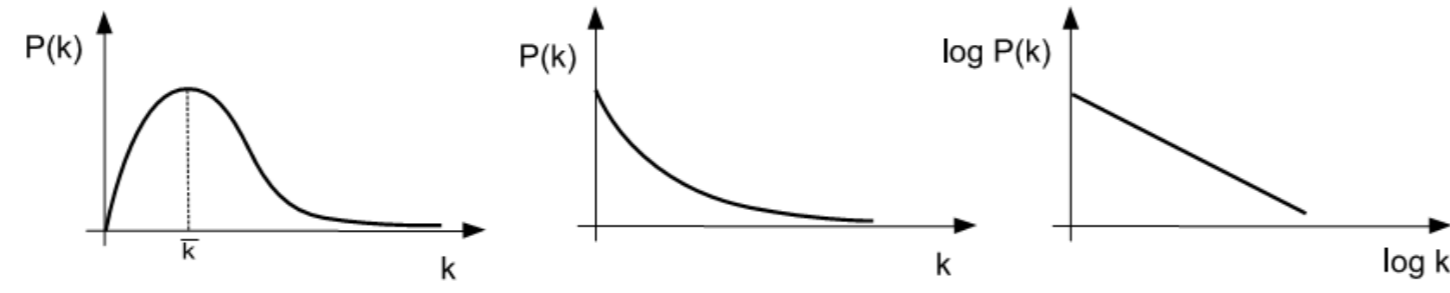
Statistički opis sustava koji se mogu predstaviti strukturom kompleksne mreže daje uvid u bitna svojstva tih sustava. U kontekstu „teorije grafova” termin „kompleksne mreže” odnosi se na graf ili mrežu koja ima netrivialna topološka svojstva koja se ne pojavljuju u jednostavnim grafovima. Struktura im je kompleksnija nego u klasičnim slučajnim mrežama [1]. Većina socioloških, bioloških i tehnoloških mreža mogu se smatrati kompleksnima s obzirom na svojstvo netrivialne topološke strukture. Ta netrivialna svojstva [5] su npr. distribucije s debelim repom (engl. fat-tailed degree distribution), visoki koeficijent grupiranja, korelacija stupnjeva, zajednice (engl. community) i hijerarhijska struktura.

Najbitnije i najinteresantnije klase kompleksnih mreža su „mreže malog svijeta” (engl. small world networks) i „mreže bez skale” (engl. scale-free networks) [2]. Albert-Barabashi mreža spada u mreže bez skale koje nastaju preferencijalnim rastom [3].

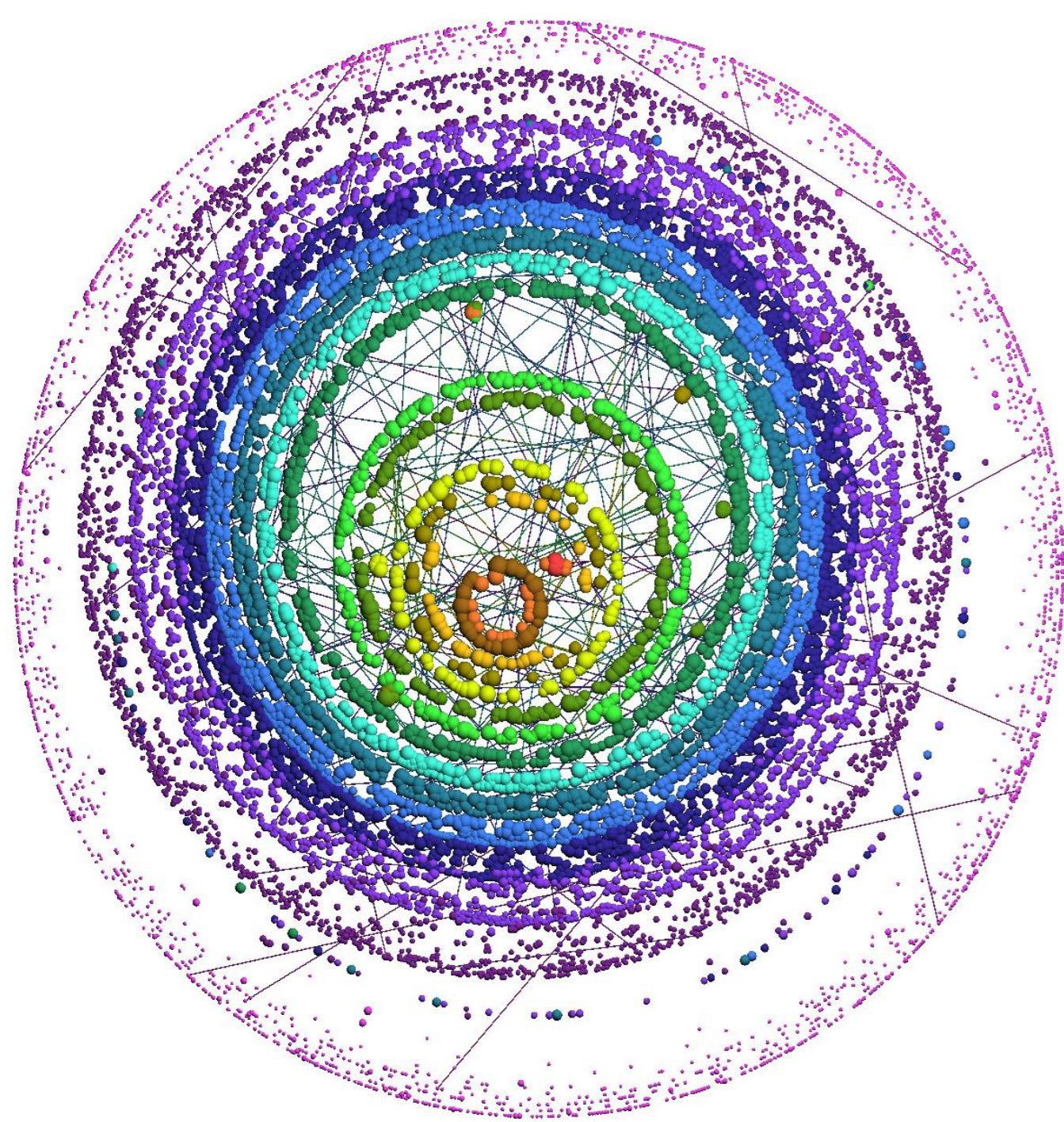
# 2. Struktura



Slika 1. [11] Od potpuno uređene rešetke (lijevo) slučajnim prespajanjem manjeg broja veza dobivamo mrežu malog svijeta [6] (sredina) koja ima mali srednji najkraći put i visok koeficijent grupiranja. Prespajanjem većeg broja veza dobivamo slučajnu mrežu (desno) koja ima mali koeficijent grupiranja.

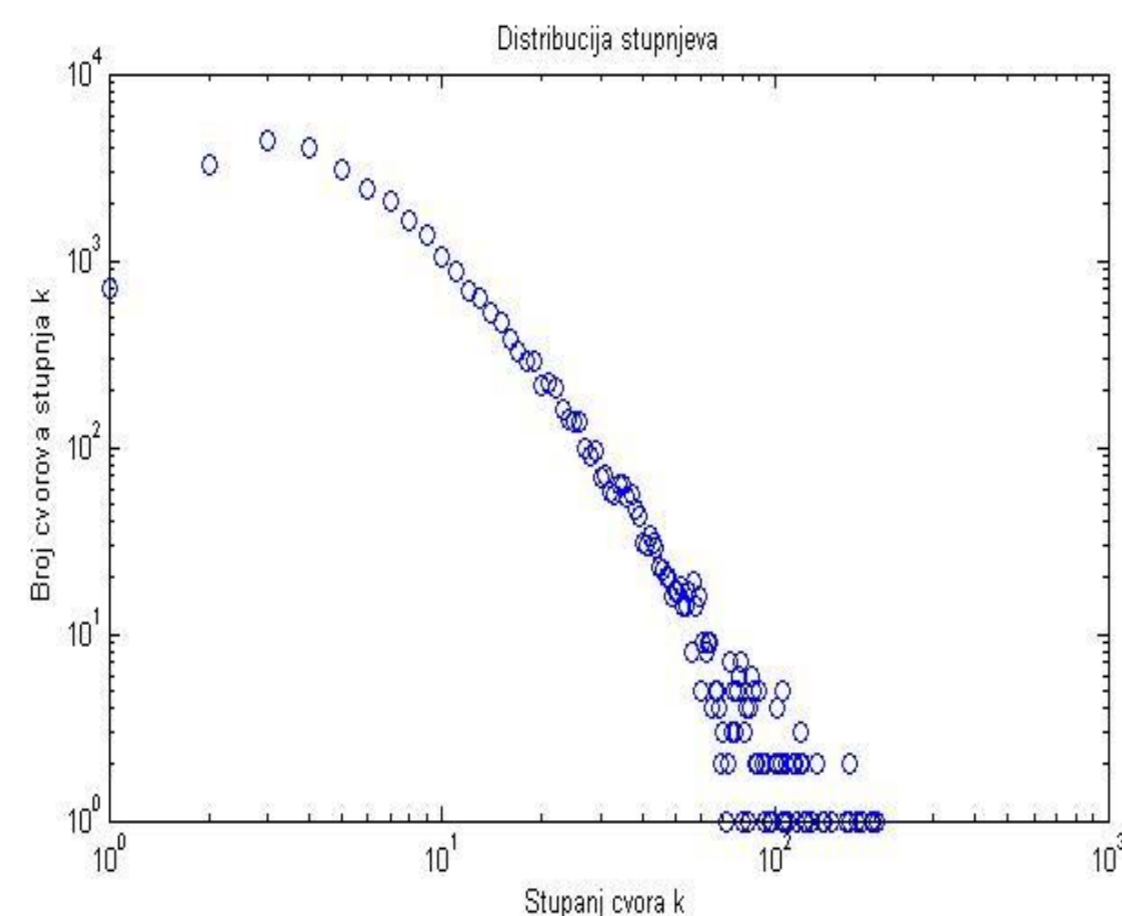


Slika 2. [11] Poissonova distribucija stupnjeva (lijevo), eksponencijalna distribucija stupnjeva (sredina), polinomna distribucija stupnjeva (desno)



. 2  
. 7  
. 25  
. 97

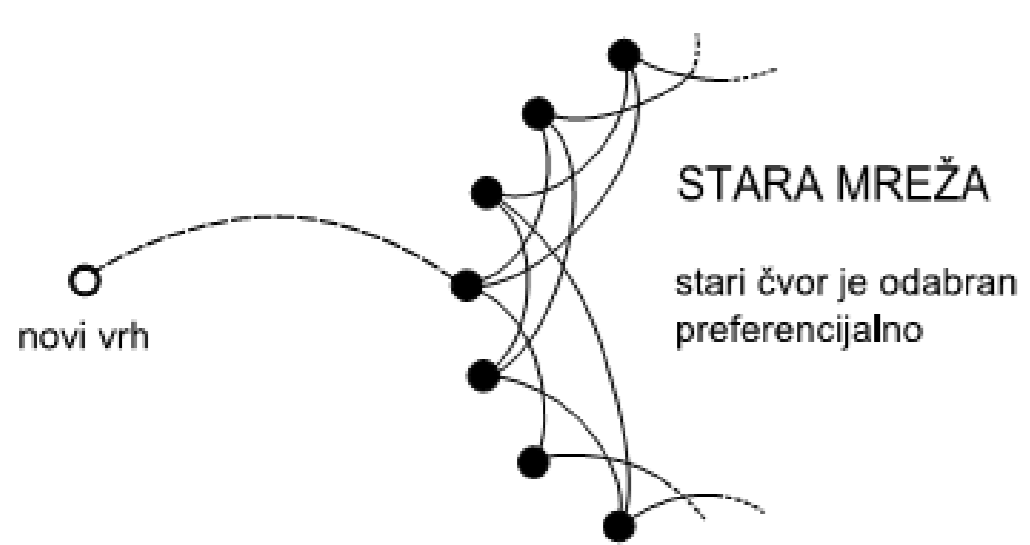
Slika 3. Realna mreža kolaboracije znanstvenika [7,8], gdje svaki čvor predstavlja autora članka. Čvorovi su povezani vezom jedino ako su pripadni čvorovi koautori na nekom članku. Najveća komponenta ove mreže ima 27 519 čvorova.



Slika 4. Distribucija stupnjeva mreže kolaboracije znanstvenika "Condensed matter collaborations 2003" ukazuje na "mrežu bez skale".

Mreža	N	<k>	L	C	α	v
AS2001	11,174	4.19	3.62	0.24	2.38	<0
WWW	10^8	7.5	16	0.11	2.4	--
Proteinska	2,115	6.8	2.12	0.07	2.4	<0
Metabolička	778	3.2	7.4	0.7	2.15	<0
Glumci	225,226	61	3.65	0.79	2.3	>0

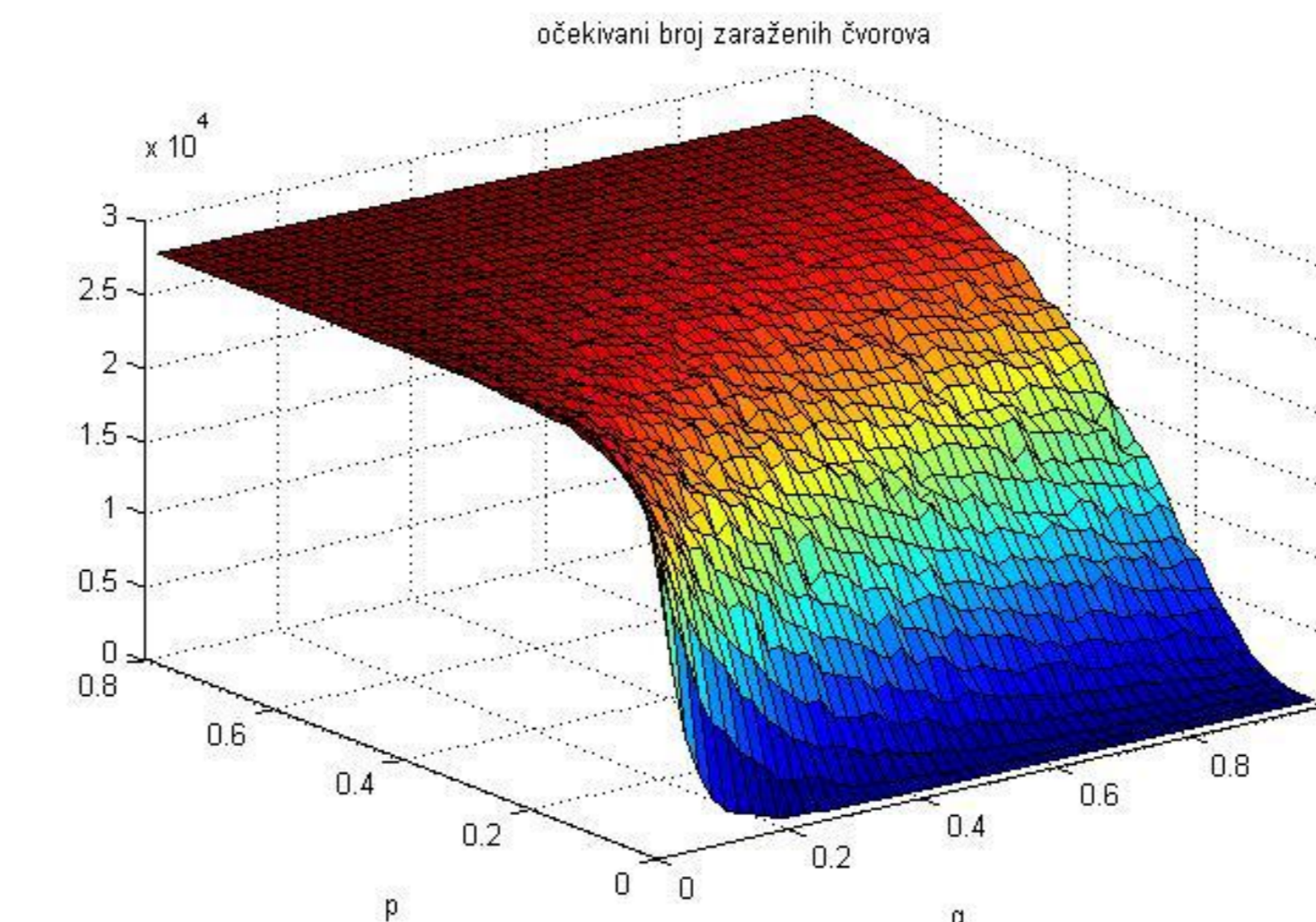
Tablica 1. Topološka svojstva [9] realnih mreža: N-broj čvorova, <k>-srednji stupanj čvora, L-srednji najkraći put, C-srednji koeficijent grupiranja, α-eksponent distribucije, v-korelacija stupnjeva



Slika 5. [11] Model preferencijalnog vezivanja Albert-Barabasi [3]. U trenutku dodavanja novog čvora u mrežu, vjerojatnost povezivanja na neki stari čvor je proporcionalna njegovom stupnju. Ovakav model generira "mreže bez skale".

# 3. Proces na mrežama

## Propagacija širenja virusa



Slika 6. Prikazuje 3D graf očekivanog broja zaraženih čvorova za sve parove (p,q) na mreži "Condensed matter collaborations 2003" ukoliko zaraza kreće iz jednog čvora [10].

### SIR – MODEL [4]

Čvor unutar mreže može biti u jednom od tri stanja:

- Podložan ( **S**usceptible )
- Zaražen ( **I**nfected )
- Oporavljen ( **R**emoved )

Vjerojatnost prijelaza između stanja **S** u stanje **I** u jednom diskretnom trenutku je **p**.

Vjerojatnost prijelaza između stanja **I** u stanje **R** u jednom diskretnom trenutku je **q**.

**Definicija 1:** Neka su  $p \in (0,1)$ ,  $q \in (0,1]$  i  $s, n \in \mathbb{N}$ . Za diskretnu slučajnu varijablu  $X$

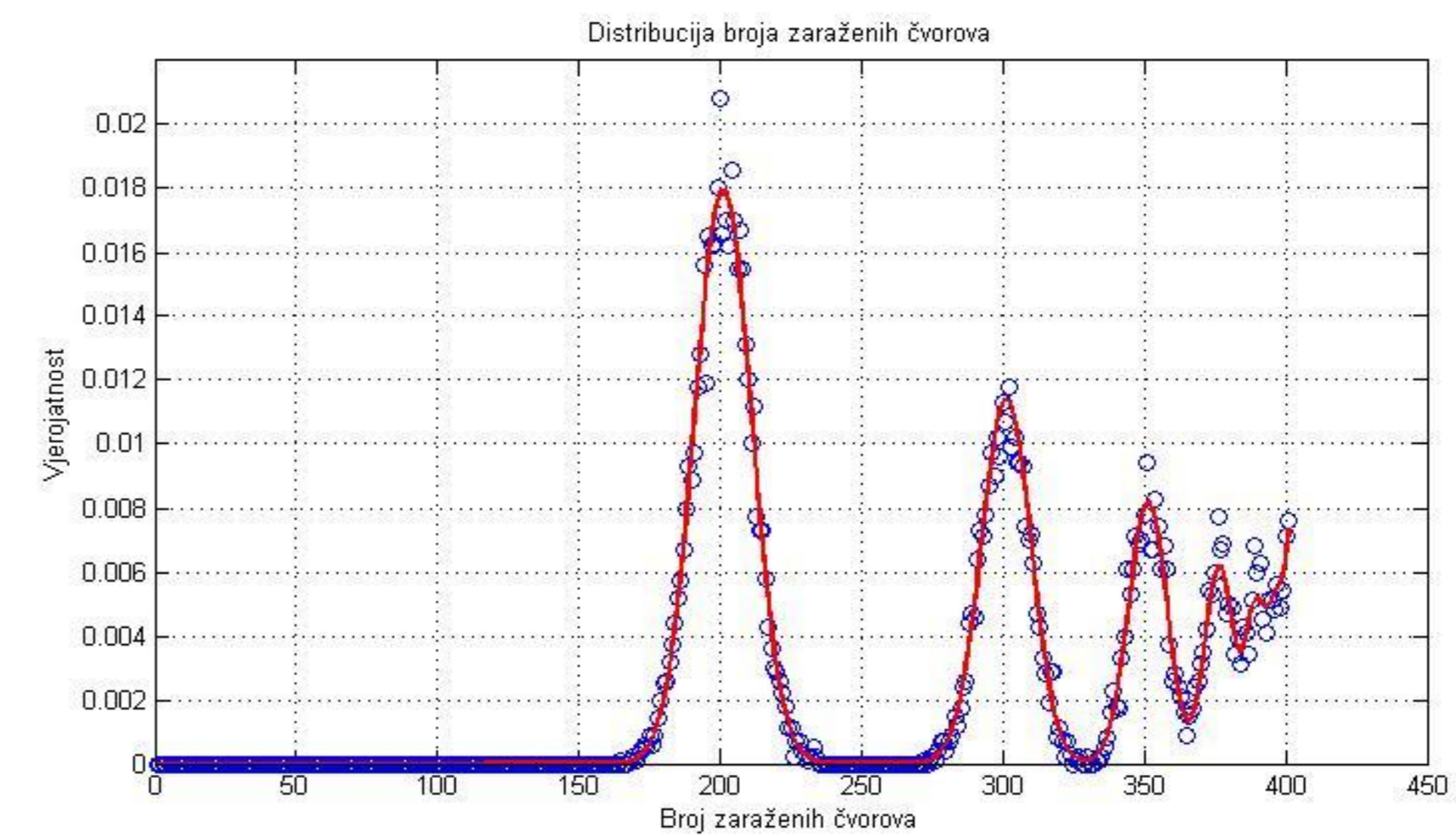
kažemo da ima razdiobu infekcije s parametrima  $n, s, p, q, v$  u oznaci  $X \sim I(n, s, p, q, v)$ ,

ako joj je distribucija dana sa

$$P(X = k) = q^v \binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \left( \frac{(1-p)^{n-k+i}}{(1-(1-q)(1-p)^{n-k+i})^v} \right) \cdot \mathbf{1}_{\{0, \dots, n\}}(k) \quad (1)$$

$$E[X_n^{(s,v)}] = E\left[\sum_{i=1}^n I_i^{(s,v)}\right] = \sum_{i=1}^n E[I_i^{(s,v)}] = \sum_{i=1}^n P(X_i^{(s,v)} = 1) = nP(X_1^{(s,v)} = 1) \quad (2)$$

$$\sigma(X_n^{(s,v)}) = n \sqrt{P(X_2^{(s,v)} = 2) - P(X_1^{(s,v)} = 1)^2 + \frac{1}{n} [P(X_1^{(s,v)} = 1) - P(X_2^{(s,v)} = 2)]} \quad (3)$$



Slika 7. Distribucija broja zaraženih čvorova u bipartitnom grafu [10] iz simulacija (plavo) i graf funkcije distribucije slučajne [10] varijable broja zaraženih čvorova iz analitičkog modela (crveno).

## Slučajne šetnje po grafu i recommender sustavi

Slika 8. Koristeći javno dostupne podatke sa VideoLectures.Net Recommender System challenge-a moguće je simulirati korisnike na web-u. Svaki korisnik predstavlja jednog neovisnog slučajnog šetača na mreži video sadržaja [12].

# 4. Reference i zahvale

Autor se zahvaljuje suradnicima:

- T. Šmuc, D.Gamberger, M.Bošnjak: Institut Ruđer Bošković - Zavod za elektroniku, Zagreb,
  - M. Šikić: Fakultet elektrotehnike i računarstva - Zavod za elektroničke sustave i obradu informacija, Zagreb,
  - A. Lančić: Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odjel, Zagreb,
  - H. Štefančić, V.Zlatić: Institut Ruđer Bošković - Zavod za teorijsku fiziku, Zagreb,
  - M. Gračar: Jožef Štefan Institute, Department of Knowledge Technologies / E8, Ljubljana
- Suradnicima na e-LICO projektu: e-LICO: An e-Laboratory for Interdisciplinary Collaborative Research in Data Mining and Data-Intensive Science

Reference:

[1] Erdős, P.; Rényi, A. (1959). "On Random Graphs. I.". *Publicationes Mathematicae* 6: 290–297.  
[2] Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. The shortest path to complex networks. *ArXiv:cond-mat/0404593 v4*, 24.7.2004.  
[3] A.-L. Barabási, R. Albert and H. Jeong (1999), Mean-field theory for scale-free random networks, *Physica A* 272, 173.  
[4] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A 115, 700 (1927)  
[5] Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW. Oxford 2003.  
[6] D.J.Watts and S.H.Strogatz, *Nature* 393 (1998).  
[7] Network Data, 13.1.2008., Newman, <http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/>, 15.2.2008.  
[8] Large Network Visualization tool, <http://xavier.informatika.indiana.edu/lanet-viz/>, 1.6.2008.  
[9] S.Boccaletti, V.Latora, Y.Moreno, M.Chavez, D.-U.Hwang, Complex networks: Structure and dynamics, *Physics Reports*, 424, 2006  
[10] Lančić, A., Antulov-Fantulin, N., Šikić, M. and Štefančić, H., Phase diagram of epidemic spreading – unimodal vs. bimodal probability distributions, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390 (2011) 65-76  
[11] Piškorec, M., Modeli rasta kompleksnih mreža, 2007, <http://complex.zesoi.fer.hr/Seminars.html>  
[12] N. Antulov-Fantulin, M.Bošnjak, T.Šmuc, V.Zlatić, M. Grčar, Artificial clickstream generation algorithm - biased random walk approach, Unpublished